UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA ELEKTROTEHNIKO

Matej Filip

REŠENE NALOGE IZ IZPITOV PRI PREDMETU MATEMATIKA 2 VISOKOŠOLSKI ŠTUDIJ

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2025

UVOD

Naloge na naslednjih straneh so bile na pisnih izpitih v študijskih letih 2019/20–2024/25 pri predmetu Matematika 2, ki je obvezni predmet za študente, vpisane na visokošolski dodiplomski študijski program Aplikativna elektrotehnika, na Univerzi v Ljubljani.

KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II
Visokošolski študij

25. 5. 2020

1. **[10T]** Določite ploščino trikotnika z oglišči $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ in $C(0,1,1)$.

Ploščino trikotnika v prostoru najlažje dobimo iz vektorskega produkta dveh stranic:

$$P = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|.$$

Izračunajmo vektorja stranic:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (0-1,\ 1-0,\ 0-0) = (-1,1,0),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0-1,\ 1-0,\ 1-0) = (-1,1,1).$$

Sedaj izračunamo vektorski produkt:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \big(1\cdot1-0\cdot1,\ -((-1)\cdot1-0\cdot(-1)),\ (-1)\cdot1-1\cdot(-1)\big).$$

Torej

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,\ 1,\ 0).$$

Njegova dolžina je

$$\|(1,1,0)\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}.$$

Zato je ploščina trikotnika

$$\boxed{P = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

Kratek geometrijski komentar: točki B in C imata enaki prvi dve koordinati, razlikujeta se le v z, zato je $|BC| = 1$. Višina iz A na premico BC je razdalja od $A(1,0,0)$ do premice skozi $B(0,1,0)$ v smeri $(0,0,1)$, kar je

$$\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2} = \sqrt{2},$$

in zato je $P = \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. **[15T]** Določite območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(x+2)^n.$$

To je potenčna vrsta s središčem pri $x_0 = -2$ in koeficienti

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

Najprej določimo polmer konvergence R (npr. z razmernostnim kriterijem):

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n/n}{(-1)^{n+1}/(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Torej je polmer konvergence

$$\boxed{R = 1.}$$

Zato vrsta absolutno konvergira za

$$|x+2| < 1 \quad \iff \quad -3 < x < -1.$$

Robni točki. Treba je še preveriti $x = -3$ in $x = -1$.

(i) $x = -1$*:* tedaj je $(x+2) = 1$ in dobimo

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot 1^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

To je alternirajoča harmonična vrsta (brez prvih nekaj členov), ki konvergira po Leibnizovem kriteriju ($1/n$ pada proti 0). Absolutno pa ne konvergira, ker $\sum 1/n$ divergira. Torej pri $x = -1$ **konvergira (pogojno)**.

(ii) $x = -3$*:* tedaj je $(x+2) = -1$ in

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}(-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

kar divergira (harmonična vrsta).

Skupaj:

$$\boxed{\text{Območje konvergence je } (-3, -1].}$$

3. **[15T]** Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + 2y' + y = 0$$

pri pogojih $y(0) = 1$ in $y(1) = 0$.

Gre za linearno homogeno enačbo s konstantnimi koeficienti. Naredimo nastavek $y = e^{\lambda x}$, dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda + 1)^2 = 0.$$

Imamo dvojno lastno vrednost $\lambda = -1$, zato je splošna rešitev

$$y(x) = (A + Bx)e^{-x}.$$

Uporabimo robna pogoja.

Iz $y(0) = 1$ sledi

$$(A + B \cdot 0)e^0 = A = 1.$$

Iz $y(1) = 0$ dobimo

$$(1 + B)e^{-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 + B = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = -1.$$

Zato

$$\boxed{y(x) = (1 - x)e^{-x}.}$$

Hitri pregled:

$$y' = \frac{d}{dx}\big((1 - x)e^{-x}\big) = (-1)e^{-x} + (1 - x)(-e^{-x}) = (x - 2)e^{-x},$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\big((x - 2)e^{-x}\big) = 1 \cdot e^{-x} + (x - 2)(-e^{-x}) = (3 - x)e^{-x}.$$

Potem

$$y'' + 2y' + y = (3 - x)e^{-x} + 2(x - 2)e^{-x} + (1 - x)e^{-x} = 0.$$

4. **[20T]** Temperatura na kovinski plošči oblike elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

je $f(x, y) = x + y + 3$. Kje je temperatura največja?

Ker je f linearna, maksimum na kompaktni elipsi nastopi na robu

$$g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Uporabimo Lagrangeeve multiplikatorje: $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$$\nabla f = (1,1), \qquad \nabla g = \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right).$$

Torej

$$(1,1) = \lambda \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right),$$

kar da sistem

$$1 = \lambda \frac{x}{2}, \qquad 1 = \lambda \frac{2y}{9}.$$

Od tod

$$x = \frac{2}{\lambda}, \qquad y = \frac{9}{2\lambda}.$$

Vstavimo v pogoj elipse:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{9}{2\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{13}{4\lambda^2} = 1.$$

Zato

$$\lambda^2 = \frac{13}{4} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Torej dobimo dve robni točki:

$$\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2} \ : \quad x = \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = \frac{9}{\sqrt{13}},$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{13}}{2} \ : \quad x = -\frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y = -\frac{9}{\sqrt{13}}.$$

Ker je $f = x + y + 3$, je

$$f\left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \frac{13}{\sqrt{13}} + 3 = \sqrt{13} + 3,$$

$$f\left(-\frac{4}{\sqrt{13}}, -\frac{9}{\sqrt{13}}\right) = -\sqrt{13} + 3.$$

Največja temperatura je zato v prvi točki.

$$\boxed{\text{Maksimum je v } \left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{9}{\sqrt{13}}\right) \text{ in je } f_{\max} = 3 + \sqrt{13}.}$$

5. **[20T]** Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Izračunajte vse lastne vrednosti in določite lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti.

Izračunamo karakteristični polinom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Ker ima matrika v tretji vrstici samo en neničeln element, lahko razvijemo determinanto po 3. vrstici (ali opazimo blokovno strukturo):

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Zdaj

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Torej

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2).$$

Lastne vrednosti so

$$\boxed{\lambda \in \{0, 1, 2\}.}$$

Največja lastna vrednost je 2.

Poiščimo lastne vektorje za $\lambda = 2$:

$$(A - 2I)v = 0, \qquad A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $v = (x, y, z)^T$. Sistem je

$$-x + y = 0, \qquad x - y + z = 0, \qquad -z = 0.$$

Iz tretje sledi $z = 0$, iz prve $y = x$, druga je potem avtomatsko izpolnjena. Torej

$$v = x(1, 1, 0)^T.$$

$$\boxed{\text{Za } \lambda_{\max} = 2 \text{ je lastni vektor poljubni } v = a(1,1,0),\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.}$$

KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II (25. maj 2020)
druga verzija

1. **[10T]** Izračunajte presečišče premice p in ravnine $x + y + z = 0$, če premica p poteka skozi točko $(1, 1, 1)$ in je njen smerni vektor $(1, 0, 0)$.

   Premica skozi točko $P_0 = (1, 1, 1)$ s smernim vektorjem $\vec{v} = (1, 0, 0)$ ima parametrično obliko

   $$p(t) = P_0 + t\vec{v} = (1, 1, 1) + t(1, 0, 0) = (1 + t,\ 1,\ 1).$$

   Torej

   $$x = 1 + t, \qquad y = 1, \qquad z = 1.$$

   Presečišče z ravnino $x + y + z = 0$ dobimo tako, da vstavimo v enačbo ravnine:

   $$(1 + t) + 1 + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = -3.$$

   Koordinati presečišča:

   $$x = 1 - 3 = -2, \qquad y = 1, \qquad z = 1.$$

   $$\boxed{p \cap \{x + y + z = 0\} = \{(-2, 1, 1)\}.}$$

   Komentar: ker je smerni vektor $(1, 0, 0)$, se po premici spreminja le koordinata x, y in z pa ostaneta konstantni enaki 1.

2. **[15T]** Razvijte funkcijo $f(x) = 2$, podano na intervalu $[\pi, 3\pi]$, v Fourierovo vrsto. Odgovor utemeljite z računom.

   Na intervalu dolžine $2L$ zapišemo Fourierovo vrsto v obliki

   $$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi(x - c)}{L} + b_n \sin \frac{n\pi(x - c)}{L} \right),$$

   kjer je interval $[c - L, c + L]$.
   Tukaj je

   $$[\pi, 3\pi] = [2\pi - \pi,\ 2\pi + \pi],$$

   zato je $c = 2\pi$ in $L = \pi$.
   Koeficienti so

   $$a_0 = \frac{1}{L} \int_{c-L}^{c+L} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} 2\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2(3\pi - \pi) = \frac{1}{\pi} \cdot 4\pi = 4,$$

torej je konstantni del $\frac{a_0}{2} = 2$.

Za $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{c-L}^{c+L} f(x) \cos \frac{n\pi(x-c)}{L}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} 2 \cos\big(n(x-2\pi)\big)\, dx.$$

Ker je $\int \cos(n(x-2\pi))\, dx = \frac{1}{n} \sin(n(x-2\pi))$, dobimo

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \Big[\sin(n(x-2\pi))\Big]_{\pi}^{3\pi} = \frac{2}{\pi n}\big(\sin(n\pi) - \sin(-n\pi)\big) = 0.$$

Podobno

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{c-L}^{c+L} f(x) \sin \frac{n\pi(x-c)}{L}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi}^{3\pi} \sin\big(n(x-2\pi)\big)\, dx$$

in ker je primitivna funkcija $-\frac{1}{n}\cos(n(x-2\pi))$, sledi

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{n}\right) \Big[\cos(n(x-2\pi))\Big]_{\pi}^{3\pi} = -\frac{2}{\pi n}\big(\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)\big) = 0.$$

Zato je Fourierova vrsta enostavno

$$\boxed{f(x) \equiv 2 \quad \text{in Fourierova vrsta je 2.}}$$

Komentar: ker je funkcija konstantna, je njena povprečna vrednost 2, vsi ostali (sinusni in kosinusni) členi pa odpadejo.

3. **[15T]** Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

pri pogojih $y(0) = 1$ in $y(1) = 0$.

Nastavimo $y = e^{\lambda x}$. Dobimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda + 2)^2 = 0.$$

Gre za dvojno ničlo $\lambda = -2$, zato je splošna rešitev

$$y(x) = (A + Bx)e^{-2x}.$$

Uporabimo robna pogoja.

Iz $y(0) = 1$:

$$(A + B \cdot 0)e^0 = A = 1.$$

Iz $y(1) = 0$:

$$(1 + B)e^{-2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 + B = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = -1.$$

Torej

$$\boxed{y(x) = (1 - x)e^{-2x}.}$$

Hitri pregled: vstavljanje v enačbo da res $y'' + 4y' + 4y = 0$, ker gre za standarden primer dvojne rešitve.

4. **[20T]** Temperatura na kovinski plošči oblike elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$$

je podana s funkcijo $f(x, y) = x + 3y + 1$. Kje je temperatura največja?

Ker je f linearna, maksimum na kompaktni elipsi nastopi na robu

$$g(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Uporabimo Lagrangeeve multiplikatorje: $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$$\nabla f = (1, 3), \qquad \nabla g = \left(\frac{x}{2},\, 2y\right).$$

Zato

$$(1, 3) = \lambda \left(\frac{x}{2}, 2y\right),$$

torej

$$1 = \lambda \frac{x}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{\lambda}, \qquad 3 = \lambda \cdot 2y \;\Rightarrow\; y = \frac{3}{2\lambda}.$$

Vstavimo v pogoj elipse:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{13}{4\lambda^2} = 1.$$

Od tod

$$\lambda^2 = \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Za $\lambda = \frac{\sqrt{13}}{2}$ dobimo

$$x = \frac{2}{\lambda} = \frac{4}{\sqrt{13}}, \qquad y = \frac{3}{2\lambda} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Za negativno λ dobimo nasprotno točko.

Ker je $f = x + 3y + 1$, največjo vrednost dobi tam, kjer sta x in y pozitivna:

$$\boxed{\text{Maksimum je v } \left(\frac{4}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right).}$$

(Vrednost maksimuma je $f_{\max} = 1 + \frac{4}{\sqrt{13}} + \frac{9}{\sqrt{13}} = 1 + \sqrt{13}$.)

5. **[20T]** Pri kateri vrednosti parametra $k \in \mathbb{R}$ ima sistem

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ x + y + 2z = 2, \\ x + y + kz = -1 \end{cases}$$

neskončno rešitev? Za izračunani k zapišite vse rešitve.

Sistem ima neskončno rešitev natanko tedaj, ko velja

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b) < 3,$$

kjer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Najprej odštejmo prvo vrstico od druge in tretje (elementarne operacije ne spremenijo ranga):

$$R_2 \leftarrow R_2 - R_1 : \ (0, -1, 1 \mid 1), \qquad R_3 \leftarrow R_3 - R_1 : \ (0, -1, k-1 \mid -2).$$

Zdaj odštejmo novo drugo vrstico od tretje:

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 : \ (0, 0, k-2 \mid -3).$$

Dobimo ekvivalenten stopničast sistem:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ -y + z = 1, \\ (k-2)z = -3. \end{cases}$$

Analiza.

- *Če* $k \neq 2$, potem je iz tretje enačbe $z = \dfrac{-3}{k-2}$ enolično določen, nato tudi y in x. Sistem ima zato **natanko eno** rešitev (ne neskončno mnogo).

- *Če* $k = 2$, tretja enačba postane $0 = -3$, kar je protislovje. Sistem nima rešitev.

Zato ni nobene vrednosti k, pri kateri bi sistem imel neskončno rešitev.

$$\boxed{\text{Sistem nima neskončno mnogo rešitev za noben } k \in \mathbb{R}.}$$

Dodatek (da je jasno, kaj se zgodi):

$$\text{za } k \neq 2 \text{ je rešitev enolična, za } k = 2 \text{ pa rešitev ni.}$$

IZPIT iz MATEMATIKE II

Visokošolski študij

15. junij 2020

1. [**10T**] Poiščite $k \in \mathbb{R}$, tako da bosta vektorja $(2, 1, 1)$ in $\left(-3, k, -\frac{3}{2}\right)$ vzporedna.

   Dva neničelna vektorja $\vec{u}$ in $\vec{v}$ sta vzporedna natanko tedaj, ko obstaja $\lambda \in \mathbb{R}$, da je
   $$\vec{v} = \lambda \vec{u}.$$

   Naj bo
   $$\vec{u} = (2, 1, 1), \qquad \vec{v} = \left(-3, k, -\frac{3}{2}\right).$$

   Potem mora veljati
   $$(-3, k, -\tfrac{3}{2}) = \lambda(2, 1, 1) = (2\lambda, \lambda, \lambda).$$

   Primerjamo komponente:
   $$2\lambda = -3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{2}.$$

   Tretja komponenta potem da
   $$\lambda = -\frac{3}{2},$$
   kar se ujema z $-\frac{3}{2}$ v $\vec{v}$, zato je pogoj skladen. Iz druge komponente dobimo
   $$k = \lambda = -\frac{3}{2}.$$
   $$\boxed{k = -\frac{3}{2}.}$$

   Opomba: enakovredno bi lahko zahtevali, da so razmerja komponent enaka:
   $$\frac{-3}{2} = \frac{k}{1} = \frac{-3/2}{1},$$
   od koder spet sledi $k = -\frac{3}{2}$.

2. **[12T]** Poiščite vse rešitve sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ 3y+6z=3, \\ x+2y+4z=1. \end{cases}$$

Najprej poenostavimo drugo enačbo:

$$3y+6z=3 \quad\Longrightarrow\quad y+2z=1 \quad\Longrightarrow\quad y=1-2z.$$

Vstavimo v prvo enačbo:

$$x+(1-2z)+z=0 \quad\Longrightarrow\quad x+1-z=0 \quad\Longrightarrow\quad x=z-1.$$

Sedaj vstavimo $x=z-1$ in $y=1-2z$ v tretjo enačbo:

$$(z-1)+2(1-2z)+4z=1.$$

Izračun:

$$z-1+2-4z+4z=1 \quad\Longrightarrow\quad z+1=1 \quad\Longrightarrow\quad z=0.$$

Od tod

$$y=1-2\cdot 0=1, \qquad x=0-1=-1.$$

$$\boxed{(x,y,z)=(-1,1,0).}$$

Komentar (enoličnost): Ker smo dobili natanko eno vrednost z, sledi enolična rešitev. (Tudi determinanta koeficientne matrike je neničelna.)

3. **[15T]** Razvijte funkcijo $f(x)=3$, podano na intervalu $[0,1]$, v sinusno Fourierovo vrsto. Narišite tudi graf funkcije, dane s to sinusno Fourierovo vrsto.

Sinusna Fourierova vrsta na $[0,1]$ ima obliko

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x), \qquad b_n=2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\imath\,dx.$$

Ker je $f(x)=3$, dobimo

$$b_n=2\int_0^1 3\sin(n\pi x)\,dx=6\left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1=\frac{6}{n\pi}\big(1-\cos(n\pi)\big).$$

Ker je $\cos(n\pi) = (-1)^n$, sledi

$$b_n = \frac{6}{n\pi}\big(1 - (-1)^n\big).$$

Torej je sinusna vrsta

$$\boxed{3 \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\big(1-(-1)^n\big)}{n\pi} \sin(n\pi x), \qquad x \in (0,1).}$$

Ker je $1 - (-1)^n = 0$ za sode n in $= 2$ za lihe n, lahko to zapišemo tudi kot vsoto po lihih $n = 2m - 1$:

$$\boxed{3 \sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{12}{(2m-1)\pi} \sin\big((2m-1)\pi x\big).}$$

Graf funkcije, ki jo predstavlja sinusna vrsta. Sinusna vrsta na $[0,1]$ ustreza *lihi* 2-periodični razširitvi funkcije $f(x) = 3$:

$$F(x) = \begin{cases} 3, & x \in (0,1), \\ -3, & x \in (-1,0), \end{cases} \qquad \text{in } F(x+2) = F(x).$$

Zato je graf *kvadratni signal* z amplitudo 3 in periodo 2:

$$F(x) = 3 \text{ na } (0,1) + 2\mathbb{Z}, \qquad F(x) = -3 \text{ na } (-1,0) + 2\mathbb{Z}.$$

Na točkah $x \in \mathbb{Z}$ (kjer ima razširitev skoke) Fourierova vrsta konvergira k srednji vrednosti, tj. k 0.

4. **[20T]** Letalo se spušča iz točke $(-1,-1,2)$ proti pristajalni stezi, ki leži na ravnini $z = 0$. Letalo se spušča po premici v smeri vektorja $(1,1,-1)$.

   (a) V kateri točki se dotakne ravnine $z = 0$?

   (b) Kakšen je kot med premico (smerjo letala) in ravnino $z = 0$?

(a) Presečišče s ravnino $z = 0$. Premica ima parametrično obliko

$$\ell(t) = (-1,-1,2) + t(1,1,-1) = (-1+t,\ -1+t,\ 2-t).$$

Letalo pristane, ko je $z = 0$, torej

$$2 - t = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 2.$$

Točka pristanka je

$$(-1+2,\ -1+2,\ 2-2) = (1,1,0).$$

$$\boxed{\text{Letalo bi se dotaknilo steze v točki } (1,1,0).}$$

(b) Kot med premico in ravnino. Naj bo $\vec{s} = (1,1,-1)$ smerni vektor premice, normalni vektor ravnine $z = 0$ pa je

$$\vec{n} = (0,0,1).$$

Kot α med premico in ravnino je komplement kota med premico in normalko:

$$\alpha = 90^\circ - \theta,$$

kjer je θ kot med vektorjema $\vec{s}$ in $\vec{n}$.

Kot med vektorjema dobimo iz skalarnega produkta:

$$\cos\theta = \frac{\vec{s}\cdot\vec{n}}{\|\vec{s}\|\|\vec{n}\|} = \frac{(1,1,-1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\cdot 1} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

Torej je

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Zato je iskani kot med premico in ravnino

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ker velja $\arccos(-u) = \pi - \arccos(u)$, dobimo lepšo obliko:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

To je negativno, ker smo računali orientiran kot; za *navaden geometrijski kot* vzamemo absolutno vrednost. Bolj standardno: kot med premico in ravnino je

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\|\vec{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad\Longrightarrow\quad \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 35.26^\circ.}$$

5. [**23T**] Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + 4y' + 4y = \cos x + \sin x.$$

1) Homogeni del. Najprej rešimo homogeno enačbo

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Nastavek $y = e^{\lambda x}$ da

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda + 2)^2 = 0.$$

Zato je

$$\boxed{y_h(x) = (A + Bx)e^{-2x}.}$$

2) Partikularni del. Ker je desna stran $\cos x + \sin x$, poskusimo z nastavkom

$$y_p(x) = C\cos x + D\sin x.$$

Odvodi:

$$y_p' = -C\sin x + D\cos x, \qquad y_p'' = -C\cos x - D\sin x.$$

Vstavimo v levo stran:

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p' + 4y_p &= (-C\cos x - D\sin x) + 4(-C\sin x + D\cos x) + 4(C\cos x + D\sin x) \\ &= \big((-C) + 4D + 4C\big)\cos x + \big((-D) - 4C + 4D\big)\sin x \\ &= (3C + 4D)\cos x + (3D - 4C)\sin x. \end{aligned}$$

To mora biti enako $\cos x + \sin x$, zato dobimo sistem

$$\begin{cases} 3C + 4D = 1, \\ -4C + 3D = 1. \end{cases}$$

Rešimo ga. Pomnožimo prvo z 3 in drugo z 4:

$$9C + 12D = 3, \qquad -16C + 12D = 4.$$

Odštejemo:

$$(9C - (-16C)) = 3 - 4 \quad \Longrightarrow \quad 25C = -1 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{25}.$$

Vstavimo v $3C + 4D = 1$:

$$3\left(-\frac{1}{25}\right) + 4D = 1 \quad \Longrightarrow \quad 4D = 1 + \frac{3}{25} = \frac{28}{25} \quad \Longrightarrow \quad D = \frac{7}{25}.$$

Torej

$$\boxed{y_p(x) = -\frac{1}{25}\cos x + \frac{7}{25}\sin x.}$$

3) Splošna rešitev. Skupaj:

$$\boxed{y(x) = (A + Bx)e^{-2x} - \frac{1}{25}\cos x + \frac{7}{25}\sin x, \qquad A, B \in \mathbb{R}.}$$

IZPIT iz MATEMATIKE II
Visokošolski študij

29. junij 2021

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T]

   Poiščite rešitev diferencialne enačbe

   $$y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x$$

   pri začetnem pogoju $y(1) = 0$.

   Rešitev: Najprej poiščemo rešitev homogenega dela

   $$y' - \frac{y}{x} = 0$$

   in dobimo $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = xC$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = xC(x)$. Izraz $y_p' - \frac{y_p}{x} = x^2 e^x$ se poenostavi v

   $$C'(x) = xe^x,$$

   torej $C(x) = \int xe^x$, integracija per partes nam da

   $$\int x \sin x = \cdots = -x \cos x + \sin x,$$

   torej je rešitev enaka $xC + xe^x(-1 + x)$, ko upoštevamo še začetni pogoj dobimo $C = 0$, kar pomeni, da je naša rešitev enaka $y(x) = xe^x(-1 + x)$.

2. [25T] Poiščite pravokotno projekcijo točke $T(1, 2, -1)$ na ravnino, ki ima normalo enako $\vec{n} = (5, 11, 4)$ in poteka skozi točko $A(-3, 2, 4)$.

   Rešitev: točka T leži na ravnini, tako da je projekcija točke T na ravnino enaka T.

3. [25T] Kovinsko cev v obliki elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ pustimo na soncu in izmerimo, da je temperatura v točki (x, y) enaka $x + \frac{y}{2} + 50$ stopinj Celzija. Koliko je največja dosežena temperatura na cevi in v kateri točki je dosežena? Koliko je najmanjša dosežena temperatura in v kateri točki je dosežena?

   Rešitev: Lagrangeova funkcija je $F(x, y, \lambda) = x + \frac{y}{2} + 50 + \lambda(x^2 + \frac{y^2}{2} - 1)$. Rešitev enačb $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ je enaka

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{8}}}$$

   ter

$$x_2 = y_2 = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{8}}}.$$

   V točki (x_1, y_1) je dosežen maksimum, v točki (x_2, y_2) pa minimum.

4. [5T] Koliko je rešitev diferencialne enačbe $y'' + 6y' + 9y = 0$, z danimi začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$?

$$a)\ e^{-3x} \quad b)\ \underline{xe^{-3x}} \quad c)\ -3e^{-3x} \quad d)\ -3xe^{x} \quad e)\ -3e^{x}$$

5. [5T]

   Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}?$$

$$a)\ 0 \quad b)\ 1 \quad c)\ 2 \quad d)\ \underline{3} \quad e)\ 4$$

6. [5T]

   Kateri izmed spodnjih intervalov je območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n+1}?$$

$$a)\ \underline{[-2, 0)} \quad b)\ (-2, 0] \quad c)\ (-2, 0) \quad d)\ [0, 2) \quad e)\ (0, 2]$$

7. [5T]

   Koliko mora biti konstanta a, da bosta vektorja $(1, 2, a)$ ter $(-2, -4, -6)$ vzporedna?

$$a)\ 0 \quad b)\ 1 \quad c)\ 2 \quad d)\ \underline{3} \quad e)\ 4$$

8. [5T]

Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije

$$f(x, y) = \ln(2x + xy + y^2)?$$

a) $(0, 1)$ *b*) $(1, -1)$ *c*) $(2, -1)$ *d*) $(3, -2)$ *e*) $\underline{(4, -2)}$

Rešitve: IZPIT iz MATEMATIKE II (29. junij 2022)

1. **[25T]** Za katere $k \in \mathbb{R}$ ima sistem vsaj eno rešitev?

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ kx + 2y + 3z = 2, \\ x - y - 2z = 1. \end{cases}$$

(a) Pogoj za obstoj rešitev.

Naj bo matrika koeficientov in desna stran

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ k & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sistem ima enolično rešitev, če $\det(A) \neq 0$. Izračunajmo determinanto:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} k & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 4\big(2 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1)\big) - \big(k \cdot (-2) - 3 \cdot 1\big) - 3\big(k \cdot (-1) - 2 \cdot 1\big) \\ &= 4(-4 + 3) - (-2k - 3) - 3(-k - 2) \\ &= 4(-1) + (2k + 3) + (3k + 6) \\ &= 5k + 5 \\ &= 5(k + 1). \end{aligned}$$

Torej $\det(A) = 0$ natanko pri $k = -1$.

Za $k \neq -1$ ima sistem natanko eno rešitev (zato zagotovo vsaj eno).

Preverimo *primer* $k = -1$. Tedaj je sistem

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ -x + 2y + 3z = 2, \\ x - y - 2z = 1. \end{cases}$$

Iz tretje enačbe dobimo $x = 1 + y + 2z$. Vstavimo v prvo:

$$4(1 + y + 2z) + y - 3z = 9 \implies 4 + 5y + 5z = 9 \implies y + z = 1.$$

Vstavimo v drugo:

$$-(1 + y + 2z) + 2y + 3z = 2 \implies -1 + y + z = 2 \implies y + z = 3,$$

kar je protislovje. Zato pri $k = -1$ **ni** rešitev.

$$\boxed{\text{Sistem ima vsaj eno rešitev natanko za } k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.}$$

(b) Rešitev za $k = 3$.

Za $k = 3$ je sistem

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 9, \\ 3x + 2y + 3z = 2, \\ x - y - 2z = 1. \end{cases}$$

Iz tretje: $x = 1 + y + 2z$. Vstavimo v prvo:

$$4(1+y+2z)+y-3z = 9 \implies 4+5y+5z = 9 \implies y+z = 1 \implies y = 1-z.$$

Potem

$$x = 1 + (1 - z) + 2z = 2 + z.$$

Vstavimo v drugo:

$$3(2+z)+2(1-z)+3z = 2 \implies 6+3z+2-2z+3z = 2 \implies 8+4z = 2 \implies z = -\frac{3}{2}.$$

Zato

$$y = 1 - (-\tfrac{3}{2}) = \frac{5}{2}, \qquad x = 2 + (-\tfrac{3}{2}) = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right).}$$

2. **[25T]** Naj bo $f(x, y) = x^2 + x + 6y^2 + 5$ na območju

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}.$$

V kateri točki je f največja in v kateri najmanjša?

Ker je D kompaktno in je f zvezna, imata maksimum in minimum.

Minimum. Najprej poiščemo stacionarno točko brez omejitve:

$$\nabla f = (2x + 1,\ 12y) = (0, 0) \implies x = -\frac{1}{2}, \quad y = 0.$$

Preverimo pripadnost D:

$$\frac{(-1/2)^2}{4} + 0 = \frac{1/4}{4} = \frac{1}{16} \leq 1,$$

torej točka leži v notranjosti elipse in je kandidat za globalni minimum. Vrednost:

$$f\left(-\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}+0+5=\frac{19}{4}.$$

Ker je f strogo konveksna (Hessian je $\mathrm{diag}(2,12)\succ 0$), je ta stacionarna točka globalni minimum na celotnem $\mathbb{R}^2$, zato tudi na D.

$$\boxed{\text{Minimum je v } (-\tfrac{1}{2},0) \text{ in je } f_{\min}=\tfrac{19}{4}.}$$

Maksimum. Maksimum konveksne funkcije na kompaktni konveksni množici nastopi na robu, zato maksimiramo na

$$g(x,y)=\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

Uporabimo Lagrangeeve multiplikatorje:

$$\nabla f=\lambda\nabla g.$$

Ker

$$\nabla f=(2x+1,12y),\qquad \nabla g=\left(\frac{x}{2},2y\right),$$

dobimo sistem

$$2x+1=\lambda\frac{x}{2},\qquad 12y=\lambda\cdot 2y,\qquad \frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

Iz $12y=2\lambda y$ sledi $y=0$ ali $\lambda=6$.

Primer 1: $y=0$. Tedaj $\frac{x^2}{4}=1$, torej $x=\pm 2$.

$$f(2,0)=4+2+5=11,\qquad f(-2,0)=4-2+5=7.$$

Primer 2: $\lambda=6$. Tedaj iz $2x+1=6\cdot\frac{x}{2}=3x$ sledi $1-x=0$, torej $x=1$. Z omejitvijo:

$$\frac{1}{4}+y^2=1\implies y^2=\frac{3}{4}\implies y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vrednost:

$$f\left(1,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+1+6\cdot\frac{3}{4}+5=2+\frac{9}{2}+5=\frac{23}{2}.$$

Ker je $\frac{23}{2}=11.5>11$, sta to globalni maksimalni točki.

$$\boxed{\text{Maksimum je v } \left(1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ in je } f_{\max} = \frac{23}{2}.}$$

Opomba o enotah: ker je 1 enota = 1 dm, so koordinate v decimetrih.

3. **[25T]** Rešite diferencialno enačbo

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x, \qquad y(1) = 0.$$

Gre za linearno enačbo $y' + p(x)y = q(x)$ s $p(x) = -\frac{2}{x}$. Integracijski faktor:

$$\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{2}{x}\,dx\right) = \exp(-2\ln x) = x^{-2}.$$

Pomnožimo enačbo z x^{-2}:

$$x^{-2}y' - 2x^{-3}y = e^x.$$

Leva stran je odvod produkta:

$$\left(x^{-2}y\right)' = e^x.$$

Integriramo:

$$x^{-2}y = \int e^x\,dx = e^x + C.$$

Torej

$$y = x^2(e^x + C).$$

Iz pogoja $y(1) = 0$ dobimo

$$0 = 1^2(e + C) \implies C = -e,$$

zato

$$\boxed{y(x) = x^2\left(e^x - e\right).}$$

4. **[5T]** Kateri vektor je lastni vektor za lastno vrednost 2 matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

Preverimo kandidate oblike $(1, t, 1)$. Izračun:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot t + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 1\cdot t + 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot t + 0\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ t+2 \\ t \end{pmatrix}.$$

Za lastno vrednost 2 mora veljati

$$\begin{pmatrix} 2 \\ t+2 \\ t \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Torej $t+2=2t$ in $t=2$, zato je pravilen vektor $(1,2,1)$.

$$\boxed{\text{Pravilen odgovor: b) } (1,2,1).}$$

5. **[5T]** Katera funkcija reši $y''+2y'+y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$?
Karakteristični polinom:

$$r^2+2r+1=(r+1)^2=0 \quad \Rightarrow \quad r=-1 \text{ dvojna.}$$

Splošna rešitev:

$$y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}.$$

Iz $y(0)=0$ sledi $C_1=0$, torej $y(x)=C_2xe^{-x}$. Odvod:

$$y'(x)=C_2(1-x)e^{-x} \Rightarrow y'(0)=C_2=2.$$

Zato $y(x)=2xe^{-x}$.

$$\boxed{\text{Pravilen odgovor: b) } y(x)=2e^{-x}x.}$$

6. **[5T]** Koliko je rang matrike

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}?$$

Izračunajmo determinanto:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 1(1\cdot 5-4\cdot 2)-1(1\cdot 5-4\cdot 1)+3(1\cdot 2-1\cdot 1) \\
&= (5-8)-(5-4)+3(2-1) \\
&= -3-1+3 \\
&= -1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Ker je determinanta neničelna, je rang enak 3.

$$\boxed{\text{Pravilen odgovor: d) } 3.}$$

7. **[5T]** Katero število leži v območju konvergence vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \left(x - \frac{3}{2}\right)^n ?$$

Gre za potenčno vrsto s koeficienti $a_n = \frac{n^2}{2^n}$. Polmer konvergence je

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

ker $\sqrt[n]{n^2} \to 1$. Torej konvergira za

$$\left| x - \frac{3}{2} \right| < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}.$$

Od ponujenih: -2 (ne), 1 (da), 4 (ne), 7 (ne), 10 (ne).

$$\boxed{\text{Pravilen odgovor: b) 1.}}$$

8. **[5T]** Koliko je $\vec{a} \times \vec{b}$ za $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = (4, 5, 6)$?

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \Big(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5,\ -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4),\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4\Big).$$

Zato

$$\vec{a} \times \vec{b} = (12 - 15,\ -(6 - 12),\ 5 - 8) = (-3, 6, -3).$$

$$\boxed{\text{Pravilen odgovor: d) } (-3, 6, -3).}$$

IZPIT iz MATEMATIKE II
Visokošolski študij

9. februar 2023

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk. Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor, ki prinese 5 točk, nepravilen pa minus 1 točko. Neodgovorjena naloga prinese 0 točk, obkrožen več kot en odgovor pa minus 1 točko. Odgovorite tako, da obkrožite črko pred pravilnim odgovorom.

1. [25T]

   Za katere $k \in \mathbb{R}$ ima spodnji sistem linearnih enačb rešitev?

   $$x - 4z = -3$$

   $$x + 2y - 6z = 1$$

   $$3x + ky - 6z = -5.$$

   Poiščite rešitev za $k = 1$.

   Rešitev:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -3 \\ 1 & 2 & -6 & | & 1 \\ 3 & k & -6 & | & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -3 \\ 0 & 2 & -2 & | & 4 \\ 0 & k & 6 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & | & -3 \\ 0 & 2 & -2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 12+2k & | & 8-4k \end{bmatrix}$$

   Tako vidimo, da za $k = -6$ sistem nima rešitve, za preostale k pa ima natanko eno rešitev. Za $k = 1$ ima sistem rešitev $x = -\frac{13}{7}$, $y = \frac{16}{7}$, $z = \frac{2}{7}$.

2. [25T]

   Funkcija $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 + y + 2$ predstavlja višino makete, ki se nahaja nad krogom $x^2 + y^2 \leq 4$. V kateri točki je višina makete največja in v kateri najmanjša? Ena enota v koordinatnem sistemu je en decimeter.

   Rešitev: Stacionarna točka v notranjosti je $(0, -\frac{1}{6})$. Lagrangeova funkcija je
   $$F(x, y, \lambda) = 2x^2 + 3y^2 + y + 2 - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

   Rešitev sistema enačb

   $$F_x = 4x - 2\lambda x = 0$$

$$F_y = 6y - 2\lambda y + 1 = 0$$
$$F_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

pa nam da točke $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(-\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{\sqrt{15}}{2}, -\frac{1}{2})$: ločimo dva primera pri $F_x = 0$: prvi je $x = 0$ kar nam da prvi dve točki, drugi pa je $\lambda = 2$, iz česar dobimo preostali dve točki. Največja višina je v točki $(0, 2)$, najmanjša pa pri točki $(0, -\frac{1}{6})$.

3. [25T]
Poiščite rešitev diferencialne enačbe
$$y' - \frac{2y}{x} = x^3 \cos(x)$$
pri začetnem pogoju $y(\pi) = 0$.
Rešitev: Najprej poiščemo rešitev homogenega dela
$$y' - \frac{2y}{x} = 0$$
in dobimo $\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = x^2C$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = x^2C(x)$. Izraz $y_p' - \frac{y_p}{x} = x^3\cos(x)$ se poenostavi v
$$C'(x) = x\cos(x),$$
torej $C(x) = \cos(x) + x\sin(x)$, kar sledi z uporabo per-partesa ($u = x$, $dv = \cos(x)dx$). Iz tega sledi, da je rešitev enaka $x^2C + x^2(\cos(x) + x\sin(x))$, ko upoštevamo še začetni pogoj dobimo $C = 1$, kar pomeni, da je naša rešitev enaka $y(x) = x^2 + x^2(\cos(x) + x\sin(x))$.

4. [5T] Katero izmed spodnjih števil je lastna vrednost matrike
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}?$$
$a)$ 0 $\quad b)$ $\underline{1}$ $\quad c)$ 2 $\quad d)$ 3 $\quad e)$ 4

5. [5T] Koliko je rešitev diferencialne enačbe $y'' + 2y' + y = 0$, z danimi začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$?

$a)$ $e^{-x}x$ $\quad b)$ $\underline{2e^{-x}x}$ $\quad c)$ $e^{-2x}x$ $\quad d)$ $2e^{-2x}x$ $\quad e)$ $e^{-x} + e^x$

6. [5T]

   Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}?$$

$a)$ 0 $\quad b)$ 1 $\quad c)$ 2 $\quad d)$ $\underline{3}$ $\quad e)$ 4

7. [5T]

   Katero izmed spodnjih števil leži v območju konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}?$$

$a)$ $\underline{0}$ $\quad b)$ 2 $\quad c)$ 4 $\quad d)$ 6 $\quad e)$ 8

8. [5T]

   Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije

$$f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y)?$$

$a)$ $(1,2)$ $\quad b)$ $(2,-1)$ $\quad c)$ $\underline{(-1,2)}$ $\quad d)$ $(1,3)$ $\quad e)$ $(2,-3)$

IZPIT iz MATEMATIKE II
Visokošolski študij

29. junij 2023

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk.
Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor.

1. **[25T]** Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$xy' - y = x^2 \ln(x+1).$$

Enačbo preuredimo v standardno linearno obliko (za $x \neq 0$):

$$xy' - y = x^2 \ln(x+1) \quad \Longrightarrow \quad y' - \frac{1}{x}y = x \ln(x+1).$$

To je linearna enačba $y' + p(x)y = q(x)$ s

$$p(x) = -\frac{1}{x}.$$

Integracijski faktor:

$$\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{1}{x}\,dx\right) = \exp(-\ln|x|) = \frac{1}{|x|}.$$

Na intervalu $x > 0$ lahko pišemo $\mu(x) = \frac{1}{x}$ (podobno na $x < 0$ dobimo isti postopek z znakom). Pomnožimo enačbo z $\frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \ln(x+1).$$

Leva stran je odvod produkta:

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \ln(x+1).$$

Integriramo:

$$\frac{y}{x} = \int \ln(x+1)\,dx + C.$$

Integriramo $\int \ln(x+1)\,dx$ z delnim integriranjem:

$$\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\,dx.$$

Ker je $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$, dobimo

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln(x+1).$$

Zato

$$\int \ln(x+1)\,dx = x\ln(x+1) - \big(x - \ln(x+1)\big) = (x+1)\ln(x+1) - x.$$

Torej

$$\frac{y}{x} = (x+1)\ln(x+1) - x + C,$$

in končno

$$\boxed{y(x) = x\Big((x+1)\ln(x+1) - x + C\Big).}$$

Opomba o definicijskem območju: zaradi $\ln(x+1)$ mora veljati $x > -1$, zaradi deljenja z x v preoblikovanju pa rešitev obravnavamo ločeno na intervalih $(-1, 0)$ in $(0, \infty)$ (formula velja na vsakem od teh intervalov).

2. **[25T]** Izračunajte lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

in določite lastni vektor, ki pripada največji lastni vrednosti.

1) Karakteristični polinom.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Razvijemo po prvi vrstici:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(1-\lambda) - 1\big) + \big(-1(1-\lambda) - 0\big). \end{aligned}$$

Najprej:

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 2 - 3\lambda + \lambda^2, \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 1 - 3\lambda + \lambda^2.$$

Zato

$$\begin{aligned}
p(\lambda) &= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)\big((\lambda^2 - 3\lambda + 1) - 1\big) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \\
&= (1-\lambda)\lambda(\lambda - 3).
\end{aligned}$$

Torej so lastne vrednosti

$$\boxed{\lambda \in \{0, 1, 3\}.}$$

Največja je $\lambda_{\max} = 3$.

2) Lastni vektor za $\lambda = 3$. Rešimo $(A - 3I)v = 0$:

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Naj bo $v = (x, y, z)^T$. Sistem:

$$\begin{cases} -2x - y = 0, \\ -x - y - z = 0, \\ -y - 2z = 0. \end{cases}$$

Iz prve: $y = -2x$. Iz tretje: $-(-2x) - 2z = 0 \Rightarrow 2x - 2z = 0 \Rightarrow z = x$.
Druga je potem izpolnjena: $-x - (-2x) - x = 0$.

Torej lahko vzamemo $x = 1$ in dobimo

$$v = (1, -2, 1).$$

$$\boxed{\text{Lastni vektor za } \lambda = 3 \text{ je npr. } (1, -2, 1) \text{ (do skalarja).}}$$

3. **[25T]** Temperatura na kovinski plošči oblike elipse

$$x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1$$

je podana s funkcijo $f(x, y) = x + y + 3$. Kje je temperatura največja?

Ker je f linearna, maksimum na kompaktni elipsi nastopi na robu

$$g(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Uporabimo Lagrangeeve multiplikatorje: $\nabla f = \lambda \nabla g$.

$$\nabla f = (1,1), \qquad \nabla g = \left(2x, \frac{2y}{9}\right).$$

Pogoj $\nabla f = \lambda \nabla g$ da

$$1 = 2\lambda x, \qquad 1 = \lambda \frac{2y}{9}.$$

Od tod

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \qquad y = \frac{9}{2\lambda}.$$

Vstavimo v robni pogoj:

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{9}{2\lambda}\right)^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{4\lambda^2} = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{10}{4\lambda^2} = 1.$$

Torej

$$\lambda^2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Za $\lambda > 0$ dobimo pozitivni (x, y), kar maksimira $x + y$:

$$x = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{5/2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad y = \frac{9}{2\lambda} = \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

$$\boxed{\text{Maksimum je v } \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{9}{\sqrt{10}}\right).}$$

(Vrednost je $f_{\max} = 3 + \frac{10}{\sqrt{10}} = 3 + \sqrt{10}$.)

4. **[5T]** Koliko je rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

z začetnima pogojema $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$?

Možnosti:

a) e^{-3x} b) $-3e^{-3x}$ c) $-3xe^{x}$ d) xe^{-3x} e) $-3e^{x}$

Karakteristična enačba:

$$r^2 + 6r + 9 = (r+3)^2 = 0 \Rightarrow r = -3 \text{ dvojna}.$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}.$$

Pogoj $y(0) = 0$ da $C_1 = 0$, torej $y = C_2 x e^{-3x}$. Odvod:

$$y'(x) = C_2(1 - 3x)e^{-3x} \Rightarrow y'(0) = C_2 = 1.$$

Torej

$$\boxed{y(x) = xe^{-3x}.}$$

$$\boxed{\text{Pravilno: d) } xe^{-3x}.}$$

5. **[5T]** Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Možnosti:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

Izračunamo determinanto:

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= 2(2-1) - 2(5-1) + (5-2) = 2 - 8 + 3 = -3 \neq 0.$$

Ker je determinanta neničelna, je rang 3.

$$\boxed{\text{Pravilno: d) } 3.}$$

6. **[5T]** Kateri interval je območje konvergence vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}?$$

Možnosti:

a) $[-3, -1)$ b) $(-3, -1]$ c) $(-3, -1)$ d) $[1, 3)$ e) $(1, 3]$

Opomba: $n = 0$ ni dovoljen, zato mislimo na $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$.

Za $|x+2| < 1$ konvergira $\sum \frac{r^n}{n}$, torej $-3 < x < -1$. Robova:

$$x = -3: \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konvergira}, \qquad x = -1: \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \text{ divergira.}$$

Zato

$$\boxed{[-3,-1).}$$

$$\boxed{\text{Pravilno: a) } [-3,-1).}$$

7. [**5T**] Koliko mora biti konstanta a, da bosta vektorja $(1,2,a)$ in $(-4,-4,-6)$ pravokotna?

   Možnosti:

   a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

   Pravokotnost pomeni skalarni produkt $= 0$:

   $(1,2,a)\cdot(-4,-4,-6) = -4-8-6a = 0 \quad \Rightarrow \quad -12-6a = 0 \Rightarrow a = -2.$

   $$\boxed{\text{Pravilno: a) } -2.}$$

8. [**5T**] Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije

   $$f(x,y) = 1 + \ln(2x + xy + y^2)?$$

   Možnosti:

   a) $(0,1)$ b) $(1,-1)$ c) $(2,-1)$ d) $(3,-2)$ e) $(4,-2)$

   Naj bo

   $$g(x,y) = 2x + xy + y^2.$$

   Ker je $f = 1 + \ln g$, velja $\nabla f = \frac{1}{g}\nabla g$, zato (kjer je $g > 0$) stacionarnost pomeni $\nabla g = 0$.

   Izračunamo:

   $$g_x = 2 + y, \qquad g_y = x + 2y.$$

   Pogoja $g_x = 0$ in $g_y = 0$ dajeta

   $$2 + y = 0 \Rightarrow y = -2, \qquad x + 2(-2) = 0 \Rightarrow x = 4.$$

   Torej kandidat je $(4,-2)$. Preverimo še definiranost:

   $$g(4,-2) = 2\cdot 4 + 4(-2) + (-2)^2 = 8 - 8 + 4 = 4 > 0,$$

   zato je to res stacionarna točka funkcije f.

   $$\boxed{\text{Pravilno: e) } (4,-2).}$$

IZPIT iz MATEMATIKE II
Visokošolski študij

27. junij 2024

Prve tri naloge so standardnega tipa in vredne vsaka 25 točk.
Zadnjih pet nalog je izbirnega tipa, pri čemer je pravilen natanko en odgovor.

1. **[25T]** Izračunajte lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in določite lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 0.

Lastne vrednosti. Izračunamo karakteristični polinom:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

Razvijemo npr. po drugi vrstici (ali neposredno računamo determinanto):

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} + 1\det\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 2\big(1(1-\lambda) - 1(-1)\big) + \big(1\cdot 0 - (1-\lambda)(-1)\big) \\ &= (1-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) + (1-\lambda) \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Torej so lastne vrednosti

$$\boxed{\lambda \in \{0, 1, 2\}.}$$

Lastni vektor za $\lambda = 0$. Rešimo $Av = 0$ za $v = (x, y, z)^T$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ x + y = 0, \\ -x + z = 0. \end{cases}$$

Iz druge enačbe je $x = -y$. Iz tretje je $z = x = -y$. Vstavimo v prvo:

$$(-y) + 2y + (-y) = 0,$$

kar drži za vsak y. Torej

$$v = y(-1, 1, -1) = (-y)(1, -1, 1).$$

$$\boxed{\text{Lastni prostor za } \lambda = 0 \text{ je span}\{(1, -1, 1)\}.}$$

2. **[25T]** Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + 4y' + 3y = 4e^x, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 2.$$

1) Homogeni del. Najprej rešimo homogeno enačbo $y'' + 4y' + 3y = 0$. Nastavek $y = e^{\lambda x}$ da karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0,$$

torej $\lambda = -1, -3$. Zato

$$y_h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

2) Partikularni del. Ker je desna stran $4e^x$, poskusimo $y_p(x) = Ae^x$. Tedaj

$$y_p' = Ae^x, \qquad y_p'' = Ae^x,$$

in vstavitev da

$$Ae^x + 4Ae^x + 3Ae^x = 8Ae^x = 4e^x \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}.$$

Torej $y_p(x) = \frac{1}{2}e^x$.

3) Splošna rešitev in pogoji.

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x.$$

Uporabimo $y(0) = 0$:

$$C_1 + C_2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 + C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Odvod:

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x,$$

in pogoj $y'(0) = 2$ da

$$-C_1 - 3C_2 + \frac{1}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad -C_1 - 3C_2 = \frac{3}{2}.$$

Rešimo sistem

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{1}{2}, \\ -C_1 - 3C_2 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Seštejemo enačbi:

$$(C_1 - C_1) + (C_2 - 3C_2) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad -2C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{2}.$$

Potem je $C_1 = 0$. Torej

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-3x} = \frac{e^x - e^{-3x}}{2}.}$$

3. **[25T]** Točkasti leteči predmet leti po ravni črti proti pristajalni stezi, ki ima obliko ravnine, na kateri ležijo točke

$$A(4, 3, 1), \quad B(2, 1, 0), \quad C(1, 2, 0).$$

Leteči predmet je v točki $P_0 = (2, 0, 1)$ in se giblje po premici, ki je presek ravnin

$$x - y + z = 3, \qquad x - 2z = 0.$$

(a) V kateri točki na pristajalni stezi pristane?

(b) Pod kakšnim kotom glede na pristajalno stezo leti?

(c) Koliko je v začetni poziciji oddaljen od pristajalne steze?

Najprej: enačba pristajalne ravnine. Vektorja

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 4, 1 - 3, 0 - 1) = (-2, -2, -1),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1 - 4, 2 - 3, 0 - 1) = (-3, -1, -1).$$

Normalni vektor ravnine je njihov vektorski produkt:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, -4).$$

Enačba ravnine skozi točko $A(4, 3, 1)$ je

$$\vec{n} \cdot \big((x, y, z) - (4, 3, 1)\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 4) + (y - 3) - 4(z - 1) = 0,$$

torej

$$\boxed{\Pi:\ x+y-4z-3=0.}$$

Premica leta. Premica je presečišče ravnin z normalama

$$\vec{n}_1=(1,-1,1),\qquad \vec{n}_2=(1,0,-2),$$

zato je smerni vektor premice

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(2,3,1).$$

Ker premica poteka skozi $P_0=(2,0,1)$, je parametrična oblika

$$\ell(t)=P_0+t\vec{s}=(2+2t,\ 3t,\ 1+t).$$

(a) Točka pristanka = presečišče ℓ in Π. Vstavimo v enačbo ravnine:

$$(2+2t)+(3t)-4(1+t)-3=0 \quad\Rightarrow\quad 2+5t-4-4t-3=0 \quad\Rightarrow\quad t-5=0\Rightarrow t=5.$$

Točka pristanka:

$$\ell(5)=(2+10,\ 15,\ 1+5)=(12,15,6).$$

$$\boxed{\text{Pristane v točki } (12,15,6).}$$

(b) Kot med premico in ravnino. Kot α med premico (smer $\vec{s}$) in ravnino Π z normalo $\vec{n}$ zadošča

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{\|\vec{n}\|\ \|\vec{s}\|}.$$

Tu je

$$\vec{n}\cdot\vec{s}=(1,1,-4)\cdot(2,3,1)=2+3-4=1,$$

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=\sqrt{18},\qquad \|\vec{s}\|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}.$$

Zato

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{18}\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{252}}=\frac{1}{6\sqrt{7}},$$

torej

$$\boxed{\alpha=\arcsin\left(\frac{1}{6\sqrt{7}}\right).}$$

(c) Razdalja točke P_0 od ravnine Π. Za ravnino $x+y-4z-3=0$ in točko $P_0=(2,0,1)$ je

$$d = \frac{|2+0-4\cdot 1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{18}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}.$$

$$\boxed{d = \frac{5}{\sqrt{18}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}.}$$

4. [**5T**] Koliko je rang matrike

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Možnosti:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

Izračunamo determinanto:

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-1)-2(4-1)+(4-2) = 2-6+2 = -2 \neq 0.$$

Ker je determinanta neničelna, je rang 3.

$$\boxed{\text{Pravilno: d) 3.}}$$

5. [**5T**] Koliko je rešitev diferencialne enačbe

$$(x^2+1)y' - 2xy = 0$$

z začetnim pogojem $y(0)=1$?

Možnosti:

a) 0 b) 1 c) $x+1$ d) x^2+1 e) x^3+1 f) x^4+1

Enačbo preuredimo:

$$(x^2+1)y' = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Integriramo:

$$\ln|y| = \ln(x^2+1) + C \quad \Rightarrow \quad y = C(x^2+1).$$

Iz pogoja $y(0) = 1$ sledi $C = 1$, zato

$$\boxed{y(x) = x^2 + 1.}$$

$$\boxed{\text{Pravilno: d) } x^2 + 1.}$$

6. **[5T]** Kateri izmed spodnjih intervalov je območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n} \,?$$

Možnosti:

a) $[-3,-1)$ b) $(-3,-1]$ c) $(-3,-1)$ d) $[1,3)$ e) $(1,3]$ f) $[1,3]$

Opomba: člen pri $n = 0$ ni definiran, zato to razumemo kot standardno vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$.

Za $|x+2| < 1$ vrsta konvergira (npr. po razmernostnem kriteriju, ker je to tip $\sum r^n/n$), torej za $-3 < x < -1$.

Preverimo robova:

- pri $x = -3$ je $x + 2 = -1$ in dobimo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, kar konvergira (alternirajoča harmonična vrsta);
- pri $x = -1$ je $x + 2 = 1$ in dobimo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, kar divergira.

Zato je območje konvergence

$$\boxed{[-3,-1).}$$

$$\boxed{\text{Pravilno: a) } [-3,-1).}$$

7. **[5T]** Koliko mora biti konstanta a, da bodo točke

$$A(a,1,1), \quad B(2,4,1), \quad C(0,2,3), \quad D(-a,-3,2)$$

ležale na isti ravnini?

Možnosti:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2 f) 3

Točke so koplanarne natanko tedaj, ko je mešani produkt

$$\det\big(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\big) = 0,$$

kjer

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2-a, 3, 0), \quad \overrightarrow{AC} = C - A = (-a, 1, 2), \quad \overrightarrow{AD} = D - A = (-2a, -4, 1).$$

Torej

$$\det \begin{pmatrix} 2-a & -a & -2a \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Izračun determinante:

$$\begin{aligned}
\det &= (2-a)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-a)\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-2a)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (2-a)(1 \cdot 1 - (-4) \cdot 2) + a(3 \cdot 1 - (-4) \cdot 0) - 2a(3 \cdot 2 - 1 \cdot 0) \\
&= (2-a)(9) + 3a - 12a \\
&= 18 - 9a - 9a \\
&= 18 - 18a = 18(1-a).
\end{aligned}$$

Pogoj $\det = 0$ da $1 - a = 0$, torej $a = 1$.

$$\boxed{\text{Pravilno: d) 1.}}$$

8. **[5T]** Katera izmed spodnjih točk je stacionarna točka funkcije

$$f(x,y) = 1 + \ln\big((x+1)^2 + xy + y\big)?$$

Možnosti:

a) $(-1, 0)$ b) $(1, -1)$ c) $(2, -1)$ d) $(3, -2)$ e) $(4, -2)$ f) $(5, -3)$

Naj bo

$$g(x,y) = (x+1)^2 + xy + y.$$

Potem je $f = 1 + \ln g$ in velja

$$\nabla f = \frac{1}{g} \nabla g,$$

zato je stacionarnost (tj. $\nabla f = 0$) ekvivalentna pogoju $\nabla g = 0$ (ob tem mora veljati *tudi* $g > 0$, da je $\ln g$ sploh definiran).

Izračunamo parcialna odvoda:

$$g_x = 2(x+1) + y, \qquad g_y = x + 1.$$

Pogoja $g_x = 0$ in $g_y = 0$ dasta:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \qquad 2(0) + y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Edina kritična točka po enačbah odvodov je torej $(-1, 0)$.

Vendar pa velja $g(-1, 0) = 0$, zato $f(-1, 0) = 1 + \ln(0)$ **ni definiran**. Strogo matematično gledano funkcija *nima* stacionarne točke v svojem definicijskem območju.

Ker pa je pri izbirnih nalogah predviden natanko en odgovor, je edina točka, ki izpolni pogoj $\nabla g = 0$, možnost **a)**.

$$\boxed{\text{(po pogojih odvodov) pravilno: a) } (-1, 0).}$$

DRUGI KOLOKVIJ iz MATEMATIKE II
Visokošolski študij

31. maj 2024

1. [10T] Rešite diferencialno enačbo
$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0,$$
pri pogojih $y(1) = 0$ ter $y(-1) = 1$.
Rešitev: nastavek $y = x^\lambda$ nam da karakteristično enačbo $\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, torej je rešitev oblike
$$Ax^{-3} + Bx^2.$$
Ko vstavimo pogoje dobimo $A = -\frac{1}{2}$ ter $B = \frac{1}{2}$.

2. [10T] Določite in skicirajte defincijsko območje funkcije dveh spremenljivk $f(x, y) = \sqrt{y - (x-1)^2} + \ln(-x^2 - y^2 + 1)$.
Rešitev: Območje je presek parabole $y \geq (x-1)^2$ ter kroga $x^2+y^2 < 1$.

3. [15T] Razvijte funkcijo $f(x) = \frac{2}{x-3}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $x = 0$ in določi njen konvergenčni polmer.
Rešitev: Velja
$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^n})x^n.$$
Konvergenčni polmer je enak 3.

4. [15T] Razvoj periodične funkcije $f(x) = x$ v Fourierovo vrsto na intervalu $[0, \pi]$ je oblike
$$F(x) = a_0 + a_1 \cos(2x) + b_1 \sin(2x) + a_2 \cos(4x) + b_2 \sin(4x) + \cdots$$
Izračunajte Fourierova koeficienta a_0 in a_1 ter skicirajte graf dobljenega približka oblike $a_0 + a_1 \cos(2x)$.
Rešitev: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x dx = \frac{\pi}{2}$. $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(2x) = 0$, kjer se zadnji integral reši s per partesom. Potrebno je narisati torej samo konstanto funkcijo $\frac{\pi}{2}$.

5. [25T] Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$y' - \frac{y}{x^2} = 2xe^{\frac{-1+x^2}{x}}$$

pri začetnem pogoju $y(1) = 0$.

Rešitev: Najprej poiščemo rešitev homogenega dela

$$y' - \frac{y}{x^2} = 0$$

in dobimo $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$ in po integriranju dobimo rešitev $y_h = e^{-\frac{1}{x}}C$. Z variacijo konstante dobimo partikularno rešitev $y_p = e^{-\frac{1}{x}}C(x)$. Izraz $y_p' - \frac{y_p}{x^2} = 2xe^{\frac{-1+x^3}{x}}$ se poenostavi v

$$C'(x) = 2xe^x.$$

Integriramo po delih (per partes) in dobimo $C = \int 2xe^x dx = 2e^x(x-1)$, torej je rešitev enaka $e^{-\frac{1}{x}}C + 2e^x(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$, ko upoštevamo še začetni pogoj dobimo $C = 0$, kar pomeni, da je naša rešitev enaka $y(x) = 2e^x(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$.

6. [25T] Temperatura (merjena v stopinjah Celzija) na gladini jezera, ki ima obliko elipse $x^2 + 2y^2 \leq 4$, je podana s funkcijo $f(x, y) = x^2 + (y-1)^2 + 10$. V kateri točki na jezeru je temperatura največja in v kateri je najmanjša?

Rešitev: Lagrangeova funkcija je

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + (y-1)^2 - \lambda(x^2 + 2y^2 - 4),$$

njene stacionarne točke pa so

$$T_1(-\sqrt{2}, -1), \quad T_2(\sqrt{2}, -1), \quad T_3(0, -\sqrt{2}), \quad T_4(0, \sqrt{2}).$$

Stacionarna točka f v notranjosti elipse pa je $T(0, 1)$.

Poračunamo še $f(T) = 10$, $f(T_1) = f(T_2) = 16$, $f(T_3) = (-1-\sqrt{2})^2 + 10$ ter $f(T_4) = (-1+\sqrt{2})^2 + 10$. Največja vrednost je torej v točkah T_1 in T_2, najmanjša pa v točki T.